ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.13 1982

Н.М.Ш е й д о р о в а

К ТЕОРИИ ОДНОМЕРНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ГИПЕРПОЛОС ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА.

Одномерные регулярные гиперполосы $H_1 \subset P_n$ впервые рассмотрел М.А.Василян [1]. В данной работе получены новые результаты по теории одномерных гиперполос: 1/доказано, что внутренний инвариантный репер (в двух двойственных формах) определяется окрестностью 4-го порядка образующего элемента гиперполосы $H_1 \subset P_n$ (в работе [1] внутреннее оснащение гиперполосы рассмотрено в окрестности 5-го порядка); 2/рассмотрены специальные виды оснащений гиперполосы и выяснен их геометрический смысл.

Обозначения и замечания:

1. Во всей работе придерживаемся следующей схемы индексов:

$$\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K} = \overline{0,n}\,; \qquad u, v, w = \overline{2, n-1}.$$

2. Оператор ∇ действует по обычному закону.

1.Образующий элемент (A, α) гиперполосы $H_1 \subset P_n$ состоит из точки A и инцидентной ей гиперплоскости α. При изменении параметра t, от которого зависит этот элемент, точка A описывает кривую V_1, а гиперплоскость α, касательная к этой кривой в точке A, огибает тангенциально-вырожденную гиперповерхность V^1_{n-1} ранга 1.

Присоединим к гиперполосе H_1 репер 1-го порядка следующим образом: положим $A_0 \equiv A$, $\alpha^n = \alpha$; точки $\{A_v\}$ поместим в характеристику E_{n-2} гиперполосы $H_1 \subset P_n$,

точку A_1 – на касательной к базисной кривой V_1 гиперполосы H_1, а точку A_n выберем таким образом, чтобы она не лежала в главной гиперплоскости α^n. Тогда основные уравнения гиперполосы в репере 1-го порядка имеют вид [1]:

$$\left\{\begin{aligned} &\omega_0^n = 0, \ \omega_0^v = 0, \ \omega_v^n = 0;\\ &\omega_1^n = a\omega_0^1, \ a \neq 0;\\ &\omega_1^v = \lambda^v \omega_0^1,\\ &\omega_v^1 = \lambda_v \omega_0^1, \end{aligned}\right. \tag{1.1}$$

где

$$da + a(\omega_0^0 - 2\omega_1^1 + \omega_n^n) = a_1 \omega_0^1; \tag{1.2}$$

$$d\lambda^v = -\lambda^u \omega_u^v + \lambda^v \omega_n^n - \omega_n^v + b^v \omega_0^1; \tag{1.3}$$

$$d\lambda_v = \lambda_u \omega_v^u - \lambda_v \omega_0^0 + \omega_v^0 - b_v \omega_0^1. \tag{1.4}$$

Из уравнений (1.3),(1.4) следует, что величины $\{\lambda^v\}$, $\{\lambda_v\}$ являются квазитензорами 2-го порядка гиперполосы $H_1 \subset P_n$. Системы функций $\Gamma_2 = \{a, \lambda^v, \lambda_v\}$, $\Gamma_3 = \{\Gamma_2, a_1, b^v, b_v\}$ называются фундаментальными геометрическими объектами соответственно 2-го и 3-го порядков регулярной гиперполосы $H_1 \subset P_n$.

Условие $a \neq 0$ означает, что гиперплоскость α^n не содержит двумерную соприкасающуюся плоскость кривой V_1, а точка A_0 не принадлежит $(n-3)$-мерной характеристической плоскости гиперповерхности V^1_{n-1}, т.е. рассматривается общий случай гиперполосы $H_1 \subset P_n$.

Из уравнений (1.2) при фиксированных значениях главных параметров имеем:

$$\delta \ln a = 2\pi_1^1 - \pi_0^0 - \pi_n^n,$$

откуда следует, что можно положить $a = 1$. После этой канонизации будем иметь

$$\omega_1^n = \omega_0^1,$$

$$\omega_0^0 - 2\omega_1^1 + \omega_n^n = a_1 \omega_0^1. \tag{1.5}$$

II. Оснащающие объекты

$$\{x_1\},\ \{x_v\},\ \{y^1\},\ \{y^v\},\ \{x, y^1, y^v\},\ \{y, x_1, x_v\} \tag{2.1}$$

определяют инвариантные реперы гиперполосы $H_1 \subset P_n$ элементы которых следующим образом выражаются через элементы исходных реперов (точечного и тангенциального):

$$\begin{aligned} &M_0 = A_0, && \eta^0 = \alpha^0 - x_1\alpha^1 - x_v\alpha^v + y\alpha^n,\\ &M_1 = A_1 + x_1 A_0, && \eta^1 = \alpha^1 + y^1\alpha^n,\\ &M_v = A_v + x_v A_0, && \eta^v = \alpha^v + y^v\alpha^n,\\ &M_n = A_n - y^v A_v - y^1 A_1 + x A_0; && \eta^n = \alpha^n. \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения на компоненты геометрических объектов (2.1) имеют вид:

$$\nabla_\delta x_v = -x_v \pi_0^0 - \pi_v^0, \tag{2.2}$$

$$\nabla_\delta y^v = y^v \pi_n^n + \pi_n^v, \tag{2.3}$$

$$\delta x_1 = x_1(\pi_1^1 - \pi_0^0) - \pi_1^0, \tag{2.4}$$

$$\delta y^1 = y^1(\pi_1^1 - \pi_0^0) + \pi_n^1, \tag{2.5}$$

$$\delta x = x(\pi_n^n - \pi_0^0) + y^v\pi_v^0 + y^1\pi_1^0 - \pi_n^0, \tag{2.6}$$

$$\delta y = y(\pi_n^n - \pi_0^0) - x_v\pi_n^v - x_1\pi_n^1 + \pi_n^0, \tag{2.7}$$

причем

$$x + y + x_1 y^1 + x_v y^v = 0. \tag{2.8}$$

Сравним уравнения (1.3), (1.4) при фиксированных главных параметрах с уравнениями (2.2), (2.3), получим, что

$$x_v = \lambda_v,$$
$$y^v = -\lambda^v.$$

Т е о р е м а 1. Двойственные друг другу плоскости $E_{n-3} = [M_v] = [A_v - \lambda_v A_0]$ и $E_2 = [\eta^v] = [\alpha^v - \lambda^v \alpha^n]$ внутренним инвариантным образом присоединены к одномерной регулярной гиперполосе $H_1 \subset P_n$ в дифференциальной окрестности 2-го порядка ее образующего элемента.

Продолжая уравнения (1.3) и (1.4) и фиксируя главные параметры, получим, что

$$\begin{aligned} \nabla_\delta b^v &= b^v(2\pi_n^n - \pi_1^1),\\ \nabla_\delta b_v &= b_v(\pi_1^1 - 2\pi_0^0). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Уравнения (2.9) показывают, что величины b^v, b_v являются тензорами 3-го порядка гиперполосы $H_1 \subset P_n$. Положим

$$b = b_v b^v. \tag{2.10}$$

В силу (2.9), имеем:

$$\delta b = 2b(\pi_n^n - \pi_0^0). \tag{2.11}$$

Будем рассматривать такие гиперполосы, для которых $b \neq 0$, тогда из уравнения (2.11) следует, что

$$d \ln \sqrt{b} = \omega_n^n - \omega_0^0 + \beta\omega_0^1,$$

где

$$\delta\beta = \beta(\pi_1^1 - \pi_0^0) - \pi_1^0 - \pi_n^1. \tag{2.12}$$

Продолжая уравнение (1.5), находим:

$$da_1 + a_1(\omega_0^0 - \omega_1^1) + 3\omega_1^0 - 3\omega_n^1 = a_{11}\omega_0^1.$$

Из этого уравнения следует, что величина $a_2 = \frac{1}{3}a_1$ удовлетворяет уравнению:

$$\delta a_2 = a_2(\pi_1^1 - \pi_0^0) - \pi_1^0 + \pi_n^1. \tag{2.13}$$

Введем в рассмотрение функции:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\tfrac{1}{2}(\beta + a_2);\\ \lambda^1 &= \tfrac{1}{2}(\beta - a_2), \end{aligned} \tag{2.14}$$

которые в силу (2.12), (2.13) удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \delta\lambda_1 &= -\lambda_1(\pi_0^0 - \pi_1^1) + \pi_1^0,\\ \delta\lambda^1 &= -\lambda^1(\pi_0^0 - \pi_1^1) - \pi_n^1. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Сравнивая уравнение (2.15) с уравнениями (2.4), (2.5), получим $x_1 = -\lambda_1$, $y^1 = -\lambda^1$.

Т е о р е м а 2. Точка $M_1 = A_1 - \lambda_1 A_0$ и гиперплоскость $\eta^1 = \alpha^1 - \lambda^1\alpha^n$ внутренним инвариантным образом присоединены к регулярной гиперполосе $H_1 \subset P_n$ в дифференциальной окрестности 4-го порядка ее образующего элемента.

Из уравнения (2.13) получим:

$$da_2 = a_2(\omega_1^1 - \omega_0^0) - \omega_1^0 + \omega_n^1 + a_3\omega_0^1, \quad (2.16)$$

$$da_2 = a_2(\omega_n^n - \omega_1^1) - \omega_1^0 + \omega_n^1 - a_3^*\omega_0^1, \quad (2.17)$$

где

$$\delta a_3 = 2a_3(\pi_1^1 - \pi_0^0) + 2a_2(2\pi_n^1 - \pi_1^0) - (\lambda^v\pi_v^0 + \lambda_v\pi_n^v + 2\pi_n^0), \quad (2.18)$$

$$\delta a_3^* = 2a_3^*(\pi_n^n - \pi_1^1) + 2a_2(\pi_n^1 - 2\pi_1^0) - (\lambda^v\pi_v^0 + \lambda_v\pi_n^v + 2\pi_n^0). \quad (2.19)$$

Функции $T = a_3 - (a_2)^2$, $\overline{T} = a_3^* - (a_2)^2$ удовлетворяют уравнениям

$$\delta T = T(\pi_n^n - \pi_0^0) - \lambda^v\pi_v^0 - \lambda_v\pi_n^v - 2\pi_n^0 + 2a_2\pi_n^1, \quad (2.20)$$

$$\delta\overline{T} = \overline{T}(\pi_n^n - \pi_0^0) + \lambda^v\pi_v^0 + \lambda_v\pi_n^v + 2\pi_n^0 - 2a_2\pi_1^0, \quad (2.21)$$

а функции $\widetilde{X} = \frac{1}{2}(T - \lambda_v\lambda^v + \lambda^1\lambda^1) + \lambda^1 a_2$; $\overline{Y} = \frac{1}{2}(\overline{T} - \lambda_v\lambda^v + \lambda_1\lambda_1) + \lambda_1 a_2$ удовлетворяют соответственно уравнениям (2.6),(2.7). Точка $\overline{M}_n^* = A_n + \lambda^v A_v + \lambda^1 A_1 + \widetilde{X}A_0$ и гиперплоскость $\overset{*}{\eta}{}^0 = \alpha^0 + \lambda_1\alpha^1 + \lambda_v\alpha^v + \overline{Y}\alpha^n$ внутренним инвариантным образом присоединены в окрестности 4-го порядка образующего элемента гиперполосы $H_1 \subset P_n$, но при этом не выполняется условие инцидентности, т.е. $(\overline{M}_n^*, \overset{*}{\eta}{}^0) \neq 0$. Однако можно выделить на прямой $[M_n, \overline{M}_n^*]$ инвариантную точку $M_n^* = A_n + \lambda^v A_v + \lambda^1 A_1 - (\overline{Y} + \lambda_v\lambda^v + \lambda_1\lambda^1)A_0$, внутренним инвариантным образом присоединенную к гиперполосе $H_1 \subset P_n$ и инцидентную гиперплоскости $\overset{*}{\eta}{}^0$. Или в пучке гиперплоскостей $[\overset{*}{\eta}{}^0, \eta^0]$ можно выделить внутреннюю инвариантную гиперплоскость $\tau^0 = \alpha^0 + \lambda_1\alpha^1 + \lambda_v\alpha^v - (\widetilde{X} + \lambda_v\lambda^v + \lambda_1\lambda^1)\alpha^n$, инцидентную точке $\overline{M}_n^*$.

Проведем более общее построение. Величины $\lambda^0 = \frac{1}{t_1+t_2}(t_1\widetilde{X} + t_2\overline{X})$, $\lambda_n = \frac{1}{t_1+t_2}(t_1\widetilde{Y} + t_2\overline{Y})$, где $\overline{X} = -(\overline{Y} + \lambda_v\lambda^v + \lambda_1\lambda^1)$, $\widetilde{Y} = -(\widetilde{X} + \lambda_v\lambda^v + \lambda_1\lambda^1)$, t_1, t_2 – любые действительные числа $(t_1 + t_2 \neq 0)$, удовлетворяют уравнениям (2.6),(2.7) и условию инцидентности (2.8).

Следовательно, точка $M_n = A_n + \lambda^v A_v + \lambda^1 A_1 + \lambda^0 A_0$ и гиперплоскость $\eta^0 = \alpha^0 + \lambda_1\alpha^1 + \lambda_v\alpha^v + \lambda_n\alpha^n$ внутренним инвариантным образом присоединены к гиперполосе $H_1 \subset P_n$ в окрестности 4-го порядка ее образующего элемента и

удовлетворяют условию инцидентности (2.8). Построенные таким образом точечный и тангенциальный реперы имеют вид:

$$M_0 = A_0, \qquad \eta^0 = \alpha^0 + \lambda_1\alpha^1 + \lambda_v\alpha^v + \lambda_n\alpha^n,$$

$$M_1 = A_1 - \lambda_1 A_0, \qquad \eta^1 = \alpha^1 - \lambda^1\alpha^n;$$

$$M_v = A_v - \lambda_v A_0, \qquad \eta^v = \alpha^v - \lambda^v\alpha^n,$$

$$M_n = A_n + \lambda^v A_v + \lambda^1 A_1 + \lambda^0 A_0; \qquad \eta^n = \alpha^n.$$

Т е о р е м а 3. При $b \neq 0$ внутренний инвариантный репер гиперполосы $H_1 \subset P_n$ (в двух двойственных формах) определяется окрестностью 4-го порядка ее образующего элемента.

Геометрическая характеристика построенного репера аналогична геометрической характеристике репера, построенного в работе [1].

III. Точку M плоскости E_{n-2} назовем фокальной, если точка M принадлежит и некоторой смежной образующей гиперповерхности V_{n-1}^1. Множество всех фокальных точек назовем фокальной поверхностью F плоской образующей E_{n-2} гиперповерхности V_{n-1}^1.

Для гиперполосы $H_1 \subset P_n$ фокальная поверхность F совпадает с плоскостью $E_{n-3} = [M_v]$.

Центральным оснащением гиперполосы H_1 [2] назовем такое оснащение, когда все нормали 1-го рода N_{n-1} пересекаются в одной точке K_n. Эта точка определена следующим образом:

$$K_n = T_n A_0 + \lambda^v A_v + A_n, \quad T_n = T + \lambda_n.$$

Под осевым оснащением гиперполосы $H_1 \subset P_n$ [2] будем понимать такое оснащение, когда все нормали 1-го рода N_{n-1} содержат неподвижную плоскость Π_{n-2}. Плоскость Π_{n-2} натянута на плоскость $\Pi_{n-3}(A_0)$ и точку

$$K(t) = A_n + \lambda^v A_v + (\lambda^1 + t\overline{\lambda})A_1 + \lambda^0 A_0,$$

где $\overline{\lambda}^2 = a_3 + a_3^* - 3(a_2)^2$.

Таким образом, имеем связку нормалей 1-го рода $N_{n-1}(t)$ с вершиной в соответствующей параметру t характеристике $E_{n-2}(t)$ гиперполосы $H_1 \subset P_n$. Если $t=0$, то $K \equiv M_n$.

Список литературы

1. Василян М.А. О проективно-дифференциальной геометрии однопараметрических гиперполос. В сб.: Дифференциальная геометрия, Калинин, 1977, с.38-45.

2. Попов Ю.И. Введение инвариантного оснащения на регулярной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства.-Уч.зап.Моск.заочн.пед.ин-та, 1971, 30, с.386-396.

3. Чакмазян С.М. Двойственная нормализация. ДАН Арм.ССР, 1959, 28, №4, с.151-157.

Семинар

по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском государственном университете

В предыдущих выпусках освещена работа семинара до 21 мая 1980 года.

Ниже приводится перечень докладов, обсужденных с 22 октября 1980 г. по 20 мая 1981г.

22.10.1980г. Ю.И.Попов. Аффинные связности двухсоставного гиперполостного распределения.

29.10.1980г. Е.В.Скрыдлова. Вырожденные конгруэнции, порожденные квадрикой и точкой.

5.11.1980г. В.В.Махоркин. Некоторые свойства фокальных многообразий.

12.11.1980г. Е.А.Хляпова. Некоторые свойства цилиндрических конгруэнций.

19.11.1980г. Л.Г.Корсакова. Пара конгруэнций коник, инцидентных одномерному многообразию квадрик.

26.11.1980г. Ю.И.Шевченко. Геометрическая характеристика некоторых индуцированных связностей поверхности.

3.12.1980г. М.В.Кретов. О связностях, ассоциированных с комплексом центральных квадрик в аффинном пространстве.

10.12.1980г. Б.А.Андреев. Некоторые вопросы геометрии многообразий пар фигур.

17.12.1980г. Т.П.Фунтикова. Конгруэнции, образованные эллипсом и прямой.

24.12.1980г. Е.П.Сопина. О полях геометрических объектов на многообразии V_{n-1}.